多重 Hurwitz ゼータ関数とLerch の公式の拡張(多重ゼータ値の研究)

鎌野, 健

数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 138-144

多重 Hurwitz ゼータ関数と Lerch の公式の拡張

早稲田大学・教育学研究科　鎌野 健 (Ken Kamano)
Graduate School of Education,
Waseda University

§1 Introduction

実数 $a>0$ と複素変数 $s_1,\ldots,s_n$ に対して，次の多重 Hurwitz ゼータ関数を考える:

$$\zeta_n(s_1,\ldots,s_n;a)=\sum_{\substack{0\leq m_1<\cdots<m_n\\ m_i\in\mathbb{Z}}}\frac{1}{(m_1+a)^{s_1}\ldots(m_n+a)^{s_n}}. \tag{1.1}$$

さらにその特殊なものを

$$\zeta_n(s;a)=\zeta_n(s,\ldots,s;a) \tag{1.2}$$

とおき，式を簡潔にするため $\zeta_0(s;a)=1$ としておく．(1.1) の右辺は $\mathrm{Re}(s_i)>1$ $(1\leq i\leq n)$ で絶対収束する．$n=1$ のとき，$\zeta_1(s;a)=\zeta(s;a)$ は古典的な Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,a)$ で，$a=1$ のとき，$\zeta_n(s_1,\ldots,s_n;1)$ は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $\zeta_n(s_1,\ldots,s_n)$ である．

多重ゼータ関数 $\zeta_n(s_1,\ldots,s_n)$ の $\mathbb{C}^n$ 上への解析接続は Akiyama, Egami, Tanigawa ([1]) や Zhao ([10]) により独立に証明された．Akiyama, Ishikawa はそれを拡張した多重 Hurwitz ゼータ関数を定義し，その解析接続を証明した．また，Matsumoto, Tanigawa は多重 Hurwitz ゼータ関数や多重 Dirichlet 級数について研究しその解析接続を示している ([7], [8])．

[7] において，Matsumoto はかなり一般的な多重 Hurwitz ゼータ関数を導入し，Mellin-Barnes integral を用いてその解析接続を証明した．[7] の記号を用いると，我々の多重 Hurwitz ゼータ関数 (1.1) は

$$\zeta_n(s_1,\ldots,s_n;a)=\zeta_n((s_1,\ldots,s_n);(a,a+1,\ldots,a+n-1),(1,\ldots,1))$$

と書くことができる．

Theorem 1.1 (Matsumoto [7, Theorem 1]) (1.1) で定義された多重 Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_n(s_1,\ldots,s_n;a)$ は $\mathbb{C}^n$ 上有理型関数へ解析接続され，次の点以外で正

則となる.

$$s_n = 1, \quad \sum_{i=1}^{j} s_{n-i+1} \in \mathbb{Z}_{\leq j} \quad (j = 2, 3, \ldots, n), \tag{1.3}$$

ただし $\mathbb{Z}_{\leq j}$ は j 以下の整数を表す.

多重 Hurwitz ゼータ関数は特異点において不定点になりうることがわかっており，ここでは [1][3] にならい次の 3 つの極限のとり方を考える:

$$\begin{aligned}
\zeta_n^{Reg}(s_1, \ldots, s_n; a) &= \lim_{t_1 \to s_1} \cdots \lim_{t_n \to s_n} \zeta_n(t_1, \ldots, t_n; a) \\
\zeta_n^{Rev}(s_1, \ldots, s_n; a) &= \lim_{t_n \to s_n} \cdots \lim_{t_1 \to s_1} \zeta_n(t_1, \ldots, t_n; a) \\
\zeta_n^{C}(s_1, \ldots, s_n; a) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \zeta_n(s_1 + \varepsilon, \ldots, s_n + \varepsilon; a)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

それぞれ regular values, reverse values, central values と呼ぶ. [1][3] において Akiyama, Egami, Tanigawa は $a = 1$ のときの regular values と reverse values の満たす漸化式を示している.

一方 central values については，$n = 2$, 3 のとき以外はほとんど知られていない. (cf. [1, §3, Remark 2]). ここでは，調和積を用いることにより一部の central values について値が求められることを見る. なお，$\zeta_n(s; a) = \zeta_n^{C}(s, \ldots, s; a)$ であることに注意する.

§2 The values of the multiple Hurwitz zeta function at non-positive integers

[1][3] において Akiyama, Egami, Tanigawa は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の regular values と reverse values についての漸化式を与えたが，同様の方法で多重 Hurwitz ゼータ関数でも同じ形の漸化式を得ることができる.

Theorem 2.1 0 以上の整数 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (ただし $n \geq 2$) に対して，次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\zeta_n^{Reg}(-u_1, \ldots, -u_n; a) \\
&= \sum_{k=-1}^{u_n} (-u_n)_k \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \zeta_{n-1}^{Reg}(-u_1, \ldots, -u_{n-2}, -u_{n-1} - u_n + k; a),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\zeta_n^{Rev}(-u_1,\dots,-u_n;a)\\
&=-\sum_{k=-1}^{u_1}(-u_1)_k\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\zeta_{n-1}^{Rev}(-u_1-u_2+k,-u_3,\dots,-u_n;a) \qquad (2.2)\\
&\quad-\zeta_{n-1}^{Rev}(-u_1-u_2,-u_3,\dots,-u_n;a)+\zeta(-u_1;a)\zeta_{n-1}^{Rev}(-u_2,\dots,-u_n;a).
\end{aligned}
$$

ただし

$$
(s)_r=\begin{cases} s(s+1)\dots(s+r-1) & (r=1,2,\cdots),\\ 1 & (r=0),\\ 1/(s-1) & (r=-1),\end{cases}
$$

であり，B_n は

$$
\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n
$$

で定義されるベルヌーイ数である．

Remark 2.2 特に $a=1$ のとき，(2.1) と (2.2) はそれぞれ [1, Eq.(6)]，[3, §7] で証明された式と一致する．

一方，central values については一般の n 変数で値を求める公式は知られていなかったが，次のように変数の値がすべて等しいような点については値を求めることができる．

Theorem 2.3 $s\in\mathbb{C}$, $s\notin\{\frac{1}{u}\,|\,u\in\mathbb{Z},\,1\le u\le n\}$ に対して次の等式が成立する:

$$
\zeta_n(s;a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\zeta_{n-k}(s;a)\zeta_1(ks;a). \qquad (2.3)
$$

これは次の等式に言いかえられる．

$$
\zeta_n^{C}(s,\dots,s;a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\zeta_{n-k}^{C}(s,\dots,s;a)\zeta_1^{C}(ks;a). \qquad (2.4)
$$

Proof. 多重ゼータ値の積で級数を入れ替える方法（調和積）を用いることにより，現れるゼータ関数が無限級数として絶対収束しているとき，次のような等式が得られる．

$$\zeta(t;a)\zeta_{n-1}(s_1,\dots,s_{n-1};a)=\sum_{i=1}^{n}\zeta_n(s_1,\dots,s_{i-1},t,s_i,\dots,s_{n-1};a)$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\zeta_{n-1}(s_1,\dots,s_{j-1},s_j+t,s_{j+1},\dots,s_{n-1};a). \tag{2.5}$$

(2.5) の右辺は $\mathbb{C}^n$ 上へ解析接続されているので，特異点を除いて (2.5) は $\mathbb{C}^n$ 上で成立する．最初に，現れるゼータ関数が特異点をとらないと仮定する．(2.5) より

$$n\zeta_n(s,\dots,s;a)=\zeta(s;a)\zeta_{n-1}(s,\dots,s;a)-\sum_{i=1}^{n-1}\zeta_{n-1}(s,\dots,\overset{i}{2s},\dots,s;a)$$

となり，(2.5) を再び用いると

$$\sum_{i=1}^{n-1}\zeta_{n-1}(s,\dots,\overset{i}{2s},\dots,s;a)=\zeta(2s;a)\zeta_{n-2}(s,\dots,s;a)-\sum_{j=1}^{n-2}\zeta_{n-2}(s,\dots,\overset{j}{3s},\dots,s;a)$$

を得る．この変形を繰り返すことにより，(2.3) 式を得る．

次にゼータ関数の特異点が現れる場合を考える．$\zeta_n(s_1,\dots,s_n;a)$ の possible な特異点は Theorem 1.1 で与えられているので，特異点 $(t_1,\dots,t_n)$ に対して適当な $\varepsilon>0$ をとれば $(t_1+\varepsilon,\dots,t_n+\varepsilon)$ を正則な範囲にとることができる．よって適当な $\varepsilon>0$ をとれば特異点が回避でき，上と同じ計算で

$$n\zeta_n(s+\varepsilon,\dots,s+\varepsilon;a)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\zeta_{n-k}(s+\varepsilon,\dots,s+\varepsilon;a)\zeta(ks+k\varepsilon;a)$$

が成立する．ただし $ks=1\ \ (k=1,2,\dots,n)$ のとき，$\varepsilon\to 0$ で Hurwitz ゼータ関数の極が現れるので，(2.3) が $s\in\mathbb{C},\ s\notin\{\frac{1}{u}\,|\,u\in\mathbb{Z},\ 1\le u\le n\}$ の範囲で成立する． □

Remark 2.4 不定点では，その極限を regular, reverse, central のどの方法でとっても (2.5) は一般には成立しない．しかし，$n=2$ で不定点での値を central でとったときの

$$\zeta(s_1;a)\zeta(s_2;a)=\zeta_2^C(s_1,s_2;a)+\zeta_2^C(s_2,s_1;a)+\zeta(s_1+s_2;a) \tag{2.6}$$

は極が現れない範囲で成立する．

Theorem 2.3 の系として，以下のように central values についての明示的な公式を得ることができる．特に (ii) は [1, §3, Remark 2] で予想されていたものである．

Corollary 2.5 (i) 次の等式が成立する:

$$\zeta_n^C(0,\dots,0;a) = \zeta_n(0;a) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(k+a-\frac{3}{2}\right). \tag{2.7}$$

(ii) 自然数 u に対して，次の等式が成立する:

$$\zeta_n^C(-2u,\dots,-2u) = \zeta_n(-2u;1) = 0. \tag{2.8}$$

Proof. (i) まず $n=1$ のとき、$\zeta_1(0;a) = 1/2 - a$ であることは古典的結果として知られている．(2.5) より

$$\zeta(0;a)\zeta_{n-1}(0;a) = n\zeta_n(0;a) + (n-1)\zeta_{n-1}(0;a)$$

であるから，$\zeta_n(0;a)$ は漸化式

$$\zeta_n(0;a) = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}-a-n\right)\zeta_{n-1}(0;a) \tag{2.9}$$

を満たす．よって

$$\begin{aligned}\zeta_n(0;a) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{2}-a-k\right)\zeta_1(0;a)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{2}-a-k\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(k+a-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

となるので，(2.7) 式が示された．

(ii) 自然数 u に対して，Theorem 2.3 より

$$n\zeta_n(-2u;1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\zeta_{n-k}(-2u;1)\zeta(-2ku;1) \tag{2.10}$$

である．自然数 m に対して $\zeta(-2m;1) = \zeta(-2m) = 0$ なので，(2.10) の右辺も 0 となる． □

§3 A generalization of Lerch's formula

これまでの結果を用いた応用として，Lerch の公式の拡張を考える．まず，古典的な Lerch の公式を確認しておく．

Theorem 3.1 (Lerch 1894, e.g.[9, p.271]) $a > 0$ に対して

$$\zeta'(0, a) = \log \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.1}$$

が成立する．ただし $\zeta'(s; a)$ は $\frac{d}{ds}\zeta(s; a)$ を表し，$\Gamma(a)$ はガンマ関数である．

Theorem 2.3 と Corollary 2.5 (i) の応用として，次のような Lerch の公式の拡張を得ることができる．

Theorem 3.2 (Multiple Lerch's formula) $a > 0$ に対して

$$\zeta_n'(0; a) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(k + a - \frac{1}{2}\right) \log \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (n \geq 1) \tag{3.2}$$

が成立する．ただし $\zeta_n'(s; a)$ は $\frac{d}{ds}\zeta_n(s; a)$ を表し，empty product は 1 とする．

証明は省略するが，帰納法によって示される恒等式

$$\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(k + x - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(m + x - \frac{1}{2}\right) \tag{3.3}$$

を用いる．

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa : *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98**, no. 2 (2001), 107-116.

[2] S. Akiyama and H. Ishikawa : *On analytic continuation of multiple L-functions and related zeta-functions*, 'Analytic Number Theory', edited by C. Jia and K. Matsumoto, Kluwer (2002), 1-16.

[3] S. Akiyama and Y. Tanigawa : *Multiple zeta values at non-positive integers*, The Ramanujan J. **5**, no. 4 (2001), 327-351.

[4] T. Arakawa and M. Kaneko : *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189-209.

[5] T. Arakawa and M. Kaneko : *On Multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan **56**, no. 4 (2004), 967-991.

[6] K. Kamano : *The multiple Hurwitz zeta function and a generalization of Lerch's formula*, Tokyo J. Math., to appear.

[7] K. Matsumoto : *The analytic continuation and the asymptonic behaviour of certain multiple zeta-functions I*, J. Number Theory **101** (2003), 223-243.

[8] K. Matsumoto and Y. Tanigawa : *The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series*, J. Theorie des Nombres de Bordeaux **15** (2003), 267-274.

[9] E. T. Whittacker and G. N. Watson : A course of modern analysis, Cambridge university press, 1927.

[10] J. Zhao : *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, no. 5 (2000), 1275-1283.